Transformada de Fourier

Matemática I

Teresa Araújo
Departamento de Matemática

Fórmula de Euler

Fórmula de Euler

$$e^{jx} = \cos(x) + j\,\mathrm{sen}(x)$$

$$e^{-jx} = \cos(x) - j\,\mathrm{sen}(x)$$

$$\cos(x) = \frac{1}{2}(e^{jx} + e^{-jx})$$

$$\mathrm{sen}(x) = \frac{1}{2j}(e^{jx} - e^{-jx})$$

Transformada de Fourier

A transformada de Fourier é uma ferramenta que transforma uma onda (função ou sinal) numa representação alternativa.

Esta representação é caracterizada pelas frequências de funções seno e cosseno.

A transformada de Fourier mostra que uma função pode ser escrita como uma soma de sinusóides.

Transformada de Fourier (equação de análise)

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

Transformada Inversa de Fourier (equação de síntese)

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)\ e^{j\omega t} d\omega$$

Este par de equações define a transformada de Fourier e o par representa-se por

$$x(t) \quad \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \quad X(\omega)$$

$$X(\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\} \qquad\qquad x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{X(\omega)\}$$

Também é usual escrever-se $X(j\omega)$.

A variável ω designa-se por **frequência angular**.

Transformada de Fourier

A transformada de Fourier também pode ser expressa em função da frequência f efectuando uma mudança de variável, sendo $f = \frac{1}{T}$ e $\omega = 2\pi f$. Nesse caso o factor de escala $\frac{1}{2\pi}$ desaparece, as equações de síntese e análise tomam a forma

Transformada de Fourier (equação de análise)

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

Transformada Inversa de Fourier (equação de síntese)

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\, e^{j2\pi ft} df$$

$$x(t) \quad \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \quad X(f)$$

Transformada de Fourier

A transformada $X(\omega)$ é geralmente referida como **espectro** de $x(t)$, uma vez que dá informação sobre a composição de $x(t)$ no domínio das frequências.

A transformada de Fourier $X(\omega)$ é, em geral, uma função complexa.

Assim, é habitual representá-la em termos da sua amplitude $|X(\omega)|$ e fase $\phi(\omega) = \sphericalangle X(\omega)$, escrevendo-se

$$X(\omega) = |X(\omega)|\, e^{j\,\phi(\omega)}$$

A função $|X(\omega)|$ designa-se por **espectro de amplitude** e a função $\phi(\omega)$ por **espectro de fase**.
O conjunto dos dois espectros designa-se por **diagrama de espectro**.

Condições de Convergência

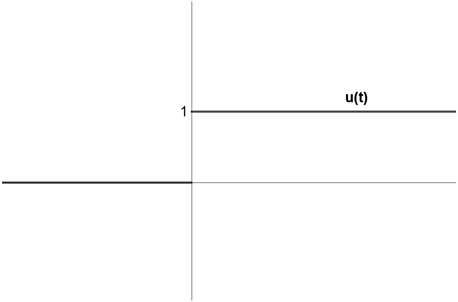
Como no caso da série de Fourier, as **condições de Dirichlet** são suficientes para assegurar a convergência da transformada de Fourier. A função/sinal $x(t)$ deve

- ser absolutamente integrável, isto é, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|dt$ é finito;
- ter um número finito de máximos e mínimos em qualquer intervalo de tempo finito;
- ter um número finito de descontinuidades em qualquer intervalo finito, devendo essas descontinuidades ter amplitude finita.

Nesse caso a reconstrução de $x(t)$ é exacta excepto nas descontinuidades (em que assume o valor médio dessas descontinuidades).

Definição:
Chamamos **função degrau unitário** (ou **função de Heaviside**) à função

$$u(t) = H(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$$



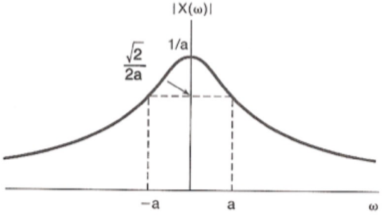
Transformada de $e^{-at}u(t)$

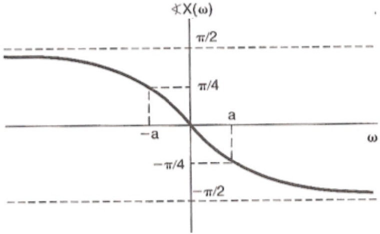
Exercício: Determinar a transformada de Fourier da função

$$x(t) = e^{-at}u(t) \qquad \text{com} \quad a > 0$$

$$X(\omega) = \frac{1}{a + j\omega}$$

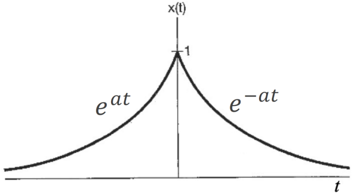
$$|X(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{a^2 + \omega^2}} \qquad\qquad \sphericalangle X(\omega) = -\text{arctg}\left(\frac{\omega}{a}\right)$$





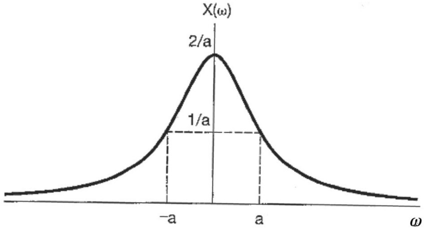
Exercício: Determinar a transformada de Fourier da função

$$x(t) = e^{-a|t|} \qquad \text{com} \quad a > 0$$



$$X(\omega) = \frac{2a}{a^2 + \omega^2}$$

Note-se que, como $x(t)$ é par, $X(\omega)$ é real.



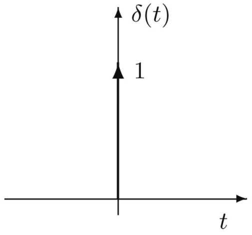
$$e^{-a|t|} \quad \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \quad \frac{2a}{a^2 + \omega^2}$$

Função Impulso Unitário ou Delta de Dirac

$$\delta_\varepsilon(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \dfrac{1}{\varepsilon}, & 0 \leq t \leq \varepsilon \\ 0, & t > \varepsilon \end{cases}$$

com $\varepsilon > 0$

$$\delta(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \delta_\varepsilon(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0 \\ +\infty, & t = 0 \end{cases}$$



$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1$$

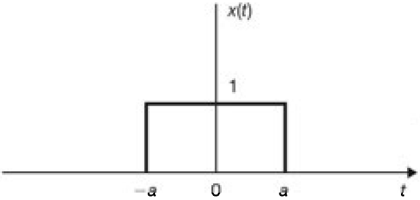
$$\mathcal{F}\{\delta(t)\} = 1$$

$$\delta(t) \quad \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \quad 1$$

Função Impulso Rectangular

É habitual definir o sinal **impulso rectangular** $p_a(t)$, com $a \in \mathbb{R}^+$, como

$$p_a(t) = \begin{cases} 1, & -a < t < a \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$



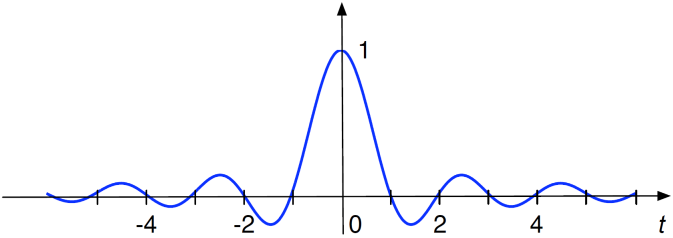
Exercício: Determinar a transformada de Fourier de $p_a(t)$.

$$P_a(\omega) = \frac{2}{\omega}\,\mathrm{sen}(a\,\omega)$$

É usual definir a função **sinc** (seno cardinal) como

$$\operatorname{sinc}(t) = \begin{cases} 1 & t = 0 \\ \dfrac{\operatorname{sen}(t)}{t} & \text{caso contrário} \end{cases}$$

A figura ilustra a função $\operatorname{sinc}(\pi t)$.



A função anula-se para $\pi t = k\pi$, ou seja, $t = k$, com $k \in \mathbb{Z}$.

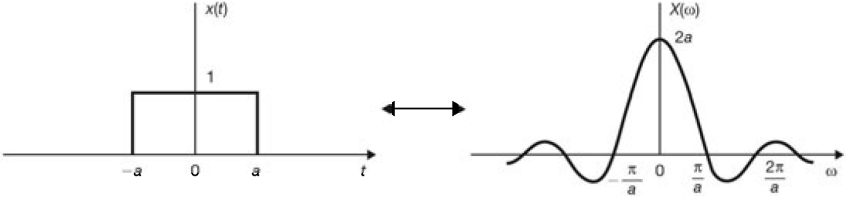
Função Impulso Rectangular

Usando a função seno cardinal (sinc), temos

$$\mathcal{F}\{p_a(t)\} = P_a(\omega) = \frac{2}{\omega}\,\mathrm{sen}(a\,\omega) = 2a\,\frac{\mathrm{sen}(a\,\omega)}{a\,\omega} = 2a\,\mathrm{sinc}(a\,\omega)$$

Escrevemos

$$p_a(t) \quad \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \quad 2a\,\mathrm{sinc}(a\,\omega)$$



Algumas Transformadas

$$e^{-at}u(t) \quad \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \quad \frac{1}{a+j\omega}$$

$$e^{-a|t|} \quad \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \quad \frac{2a}{a^2+\omega^2}$$

$$\delta(t) \quad \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \quad 1$$

$$p_a(t) \quad \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \quad 2a\,\mathrm{sinc}(a\,\omega)$$

Propriedades

Linearidade

$$k_1 x_1(t) + k_2 x_2(t) \quad \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \quad k_1 X_1(\omega) + k_2 X_2(\omega)$$

com $X_1(\omega) = \mathcal{F}\{x_1(t)\}$, $X_2(\omega) = \mathcal{F}\{x_2(t)\}$ e $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$

Propriedades

Translação no Tempo

$$x(t - t_0) \quad \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \quad e^{-j\omega t_0} X(\omega)$$

com $X(\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\}$ e $t_0 \in \mathbb{R}$

Propriedades

Translação na Frequência

$$x(t)\, e^{j\omega_0 t} \quad \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \quad X(\omega - \omega_0)$$

com $X(\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\}$ e $\omega_0 \in \mathbb{R}$

Exemplo

Exemplo: Calcule a transformada do sinal $y(t) = p_5(t-4) + p_5(t)\, e^{j3t}$.

Sabemos que $p_a(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} 2a\,\mathrm{sinc}(a\,\omega)$. Para $a = 5$ vem

$$p_5(t) \quad \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \quad 10\,\mathrm{sinc}(5\,\omega)$$

Uma vez que $x(t-t_0) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} e^{-j\omega t_0} X(\omega)$, temos

$$p_2(t-4) \quad \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \quad e^{-j4\omega} 10\,\mathrm{sinc}(5\,\omega) \qquad t_0 = 4$$

Além disso, $x(t)\, e^{j\omega_0 t} \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(\omega - \omega_0)$, de onde

$$p_5(t)\, e^{j3t} \quad \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \quad 10\,\mathrm{sinc}(5\,(\omega - 3)) \qquad \omega_0 = 3$$

Logo

$$Y(\omega) = 10\, e^{-j4\omega} \mathrm{sinc}(5\,\omega) + 10\,\mathrm{sinc}(5\,(\omega - 3))$$

Propriedades

Mudança de Escala

$$x(at) \quad \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \quad \frac{1}{|a|}X\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

com $X(\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\}$ e $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Propriedades

Reflexão

$$x(-t) \quad \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \quad X(-\omega)$$

com $X(\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\}$

Propriedades

Dualidade ou Simetria

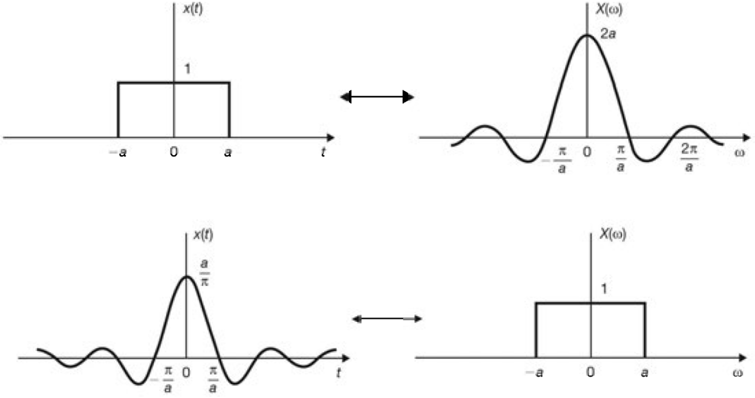
$$X(t) \quad \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \quad 2\pi\, x(-\omega)$$

com $X(\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\}$

Alguns Pares de Transformadas

$$p_a(t) \quad \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \quad 2a\,\mathrm{sinc}(a\omega)$$

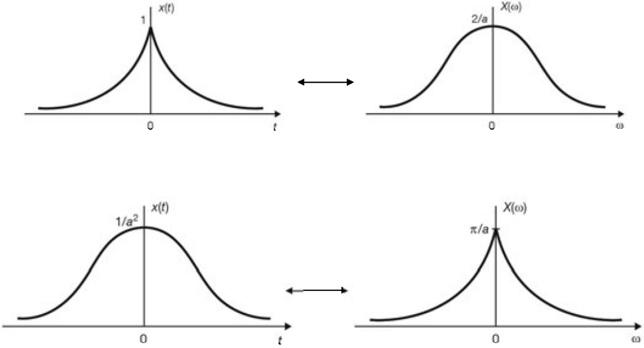
$$2a\,\mathrm{sinc}(at) \quad \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \quad 2\pi\, p_a(\omega) \qquad\qquad \frac{a}{\pi}\,\mathrm{sinc}(at) \quad \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \quad p_a(\omega)$$



Alguns Pares de Transformadas

$$e^{-a|t|} \quad \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \quad \frac{2a}{a^2+\omega^2}$$

$$\frac{2a}{a^2+t^2} \quad \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \quad 2\pi e^{-a|-\omega|} \qquad\qquad \frac{1}{a^2+t^2} \quad \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \quad \frac{\pi}{a}e^{-a|\omega|}$$



Propriedades

Seja $x(t)$ uma função derivável tal que $\lim_{t \to \pm\infty} x(t) = 0$, então

Derivação no domínio do tempo

$$\frac{dx(t)}{dt} \quad \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \quad j\omega X(\omega)$$

com $X(\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\}$

Propriedades

Derivação no domínio do frequência

$$(-jt)\,x(t) \quad \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \quad \frac{dX(\omega)}{d\omega}$$

com $X(\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\}$

Propriedades

Integração no domínio do tempo

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \quad \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \quad \pi X(0)\,\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}X(\omega)$$

com $X(\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\}$

Relação de Parseval

Relação de Parseval

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |X(\omega)|^2 d\omega$$

com $X(\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\}$

O termo no primeiro membro é a **energia total** do sinal x.

$|X(\omega)|^2$ designa-se por **densidade espectral de energia** do sinal x.

A convolução de dois sinais é dada por

$$x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, y(t-\tau) d\tau$$

Convolução

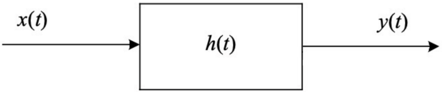
$$x(t) * y(t) \quad \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \quad X(\omega)\, Y(\omega)$$

com $X(\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\}$ e $Y(\omega) = \mathcal{F}\{y(t)\}$

A convolução no domínio do tempo resulta corresponde à multiplicação no domínio das frequências.

Canal de Comunicação

Num canal de comunicação, o sinal na saída do canal/sistema $y(t)$ é dada pela convolução entre o sinal de entrada $x(t)$ e a **resposta impulsiva** do canal $h(t)$. $y(t) = h(t) * x(t)$



A transformada de Fourier da resposta impulsiva do canal designa-se por **resposta em frequência** do canal.

$$H(\omega) = \mathcal{F}\{h(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)e^{-j\omega t}dt$$

No domínio das frequências, a transformada de Fourier da saída é igual ao produto das transformadas de Fourier do sinal de entrada e da resposta impulsiva do canal.

$$y(t) = h(t) * x(t) \quad \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \quad Y(\omega) = H(\omega)X(\omega)$$

Propriedades

Multiplicação

$$x(t)\,y(t) \quad \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \quad \frac{1}{2\pi} X(\omega) * Y(\omega)$$

com $X(\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\}$ e $Y(\omega) = \mathcal{F}\{y(t)\}$

Esta propriedade é dual da convolução.
A multiplicação no domínio do tempo resulta na convolução no domínio das frequências.

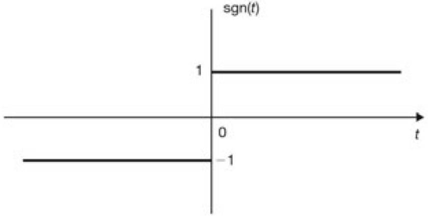
A multiplicação de dois sinais pode ser vista como utilizar um sinal para alterar a amplitude (modular) o outro. É usualmente designada por **modulação em amplitude**.

As modulações são usadas em sistemas de comunicações para adaptar o sinal a transmitir ao canal de transmissão.

Função Signum

Chamamos **função signum** (ou **função sinal**) à função

$$\text{sign}(t) = \begin{cases} -1, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$$



Exercício: Escreva a função sinal utilizando a função de Heaviside e determine a sua transformada de Fourier.

$$\text{sign}(t) = 2u(t) - 1 \qquad\qquad \text{sign}(t) \quad \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \quad \frac{2}{j\omega}$$

Exercício

Mostrar que

$$x(t)\cos(\omega_0 t) \quad \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \quad \frac{1}{2}\left[X(\omega-\omega_0)+X(\omega+\omega_0)\right]$$

$$x(t)\,\mathrm{sen}(\omega_0 t) \quad \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \quad \frac{1}{2j}\left[X(\omega-\omega_0)-X(\omega+\omega_0)\right]$$

Relação entre Delta de Dirac e Heaviside

Uma vez que a função de Heaviside é descontínua em $x = 0$ não é possível calcular a sua derivada no sentido habitual.

No entanto, usando o conceito de derivada generalizada, pode mostrar-se que

$$\frac{du(t)}{dt} = \delta(t)$$

Como consequência a função de Heaviside pode ser escrita como

$$u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau) d\tau$$

Pode encontrar a transformada de Fourier da função de Heaviside usando a propriedade da integração.

$$u(t) \quad \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \quad \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

Paridade de Funções

Qualquer função x real pode ser escrita como a soma de uma função par com uma função ímpar, isto é:

$$x(t) = x_{\text{par}}(t) + x_{\text{imp}}(t)$$

onde $x_{\text{par}}(t)$ e $x_{\text{imp}}(t)$ são, respectivamente, as componentes par e ímpar de x. As componentes podem ser definidas da seguinte forma:

$$x_{\text{par}}(t) = \frac{x(t) + x(-t)}{2} \qquad\qquad x_{\text{imp}}(t) = \frac{x(t) - x(-t)}{2}$$

Seja $X(\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\} = A(\omega) + jB(\omega)$. Então

$$X(-\omega) = X^*(\omega)$$

$$X_{\text{par}}(\omega) = \text{Re}\left[X(\omega)\right] = A(\omega)$$

$$X_{\text{ímpar}}(\omega) = j\text{Im}\left[X(\omega)\right] = jB(\omega)$$

Pode concluir-se que a transformada de um sinal par é uma função real e a transformada de um sinal ímpar é uma função imaginária pura.

Transformada de Fourier de Sinais Periódicos

Pretendemos determinar a transformada de Fourier de um sinal períodico $x(t)$ de período T_0.

Uma vez que é períodico, podemos escrevê-lo usando a série exponencial de Fourier

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \; e^{j\omega_0 kt} \quad , \text{com} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

Aplicando transformada de Fourier a ambos os lados da relação e usando linearidade, vem

$$X(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \; \mathcal{F}\{e^{j\omega_0 kt}\}$$

Transformada de Fourier de Sinais Periódicos

Sabemos que $\mathcal{F}\{\delta(t)\} = 1$. Usando a propriedade da dualidade vem

$$\mathcal{F}\{1\} = 2\pi\delta(-\omega)$$

Mas $\delta(-\omega) = \delta(\omega)$, logo

$$\mathcal{F}\{1\} = 2\pi\delta(\omega)$$

Aplicando translação na frequência, obtemos

$$\mathcal{F}\{e^{j\omega_0 t}\} = 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$$

e portanto

$$\mathcal{F}\{e^{j\omega_0 kt}\} = 2\pi\delta(\omega - k\omega_0)$$

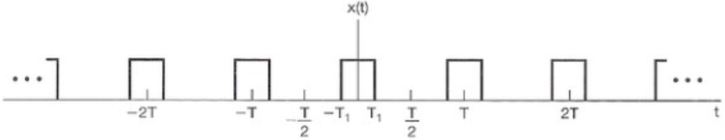
Logo

$$X(\omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k\, \delta(\omega - k\omega_0)$$

A transformada de Fourier de um sinal periódico pode ser vista como um pente de impulsos equidistantes que ocorrem nas frequências $k\omega_0$ (as frequências harmónicas do sinal).

Transformada de Fourier de Sinais Periódicos

Consideremos o sinal de onda quadrada ilustrado na figura

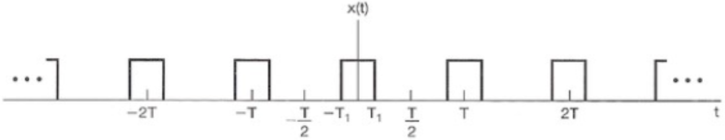


Os coeficientes da série de Fourier deste sinal são

$$c_k = \frac{2}{\omega_0 k T} \operatorname{sen}\left(\omega_0 k T_1\right)$$

Logo a transformada de Fourier do sinal é

$$X(\omega) = \frac{4\pi}{\omega_0 T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{k} \operatorname{sen}\left(\omega_0 k T_1\right)\, \delta(\omega - k\omega_0)$$



A transformada de Fourier do sinal é

$$X(\omega) = \frac{4\pi}{\omega_0 T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{k} \operatorname{sen}\left(\omega_0 k T_1\right) \delta(\omega - k\omega_0)$$

$T = 4T_1$